

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College – Colombo 07

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

කොළඹ 07 රාජකීය විද්‍යාලය
lombo 07 Royal College

13 ශ්‍රේණිය

සංයුක්ත ගණිතය I
Combined Mathematics I

පැය තුනයි
Three hours



රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07
Royal College – Colombo 07

රාජකීය විද්‍යාලය - කොළඹ 07

කොළඹ 07 රාජකීය විද්‍යාලය
Colombo 07 Royal College

13 ശ్రേణිය

සංයුක්ත ගණිතය I Combined Mathematics I
--

පැය තුනයි
Three hours

- A කොටසේ ප්‍රශ්න සියල්ලටමද, B කොටසේ ප්‍රශ්න පහකට පිළිතුරු සපයන්න.

- (1) $\sin n \neq 0$ බව දී ඇත්නම් සියලුම n නිඛිල සඳහා $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ බව පෙන්වීම ගණිත අනුභවන මූලධර්මය භාවිතා කරන්න.

[illegible]

- (2) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^n$ ප්‍රසාරණයේ x^7 හා x^8 පදවල සංගුණක සමාන නම් n සොයන්න.

[illegible]

- (3) ඕනෑම නිශ්ශුන්‍ය A, B සමවකුරු ස්‍රෝතවල දෙකක් සඳහා

$$A^2 = I, \quad B^2 = I \quad \text{හා}$$

$$(AB)^2 = I \quad \text{නම්}$$

$$AB = BA \quad \text{බව පෙන්වන්න}$$

- (4) සුපුරුදු අංකනයෙන් $n \in \mathbb{Z}^+$ වන $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කරන්න.

එනමින් $n \in \mathbb{Z}^+$ වන $(1-x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය අපෝහනය කරන්න.

$(1+x)^n (1-x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ x^0 හි සංගුණකය සලකා,

$\sum_{r=0}^n (-1)^r {}^nC_r$ හි අගය n ඔත්තේ වන විට ශුන්‍ය බවත්, n ඉරට්ටේ විට ${}^nC_{n/2}$ වන බවත් පෙන්වන්න.

(5) α, β යන $ax^2 + bx + c = 0$ මූල වීම $\lim_{x \rightarrow \alpha} 1 - \frac{\cos(ax^2 + bx + c)}{(x - \alpha)^2} = \frac{a^2}{2}(\alpha - \beta)^2$

(6) $x = e^{-t}$ $y = t^3$ ($t =$ පරාමිතියක්) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$ හි අගය සොයන්න.

- (9) g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$ වෘත්තය $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. $y = -5$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරමින් $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරමින් $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ වෘත්ත කියක් ඇඳිය හැකිදැයි පෙන්වන්න.

[illegible]

$$(10) \quad \tan\left(\frac{\pi}{7} + 3\theta\right) \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{7} - 2\theta\right) \cdot \tan\left(\frac{4\pi}{7} - \theta\right) = \tan\left(\frac{\pi}{7} + 3\theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{7} - 2\theta\right) + \tan\left(\frac{4\pi}{7} - \theta\right) \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.



13 ශ්‍රේණිය

සංයුක්ත ගණිතය I Combined Mathematics I

B - කොටස

- (11) a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ සහ $a \neq 0$ යැයි ගනිමු.
- සියලුම x සඳහා $f(x) \geq 0$ වීමට අවශ්‍යතාව කුමක් ද?
 - සියලුම x සඳහා $f(x) \leq 0$ වීමට අවශ්‍යතාව කුමක් ද?
 - සියලුම x, y සඳහා $x^2 + axy + by^2 - \frac{1}{8}x - y - \frac{1}{4} \geq 0$ වේනම් $b + 32a + 256 < 0$ බව පෙන්වන්න.
- b) $x^2 + 10x + c = 0$ සමීකරණයෙහි, එක් මූලයක් අනෙක් මූලයෙහි සහය වේ නම්, $\alpha^6 - 100\alpha^2 - 10c\alpha + c = 0$ බව පෙන්වන්න.
- c) $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu x + \theta$ බහු පදය $(x-1)^2$ න් බෙදෙන අතර එය $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 4කි.
- $f(x)$ බහු පදය $(x-3)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 20 බව පෙන්වා මෙම බහුපදය ඒකජ සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ලියන්න.
- (12) a) වට මේසයක් සහ පුටු කට්ටලයක් පවතින්නේ, ඕනෑම තනි පුද්ගලයෙකු මේසය වටා අසුන් ගැන්විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන 1ක් වන පරිදිය.
- වට මේසය වටා පවතින පුටු n සංඛ්‍යාව මත එකිනෙකට වෙනස් මිනිසුන් k සංඛ්‍යාවක් අසුන් ගැන්විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන කොපමණ ද? ($1 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{Z}^+$)
 - එනමින්, පුටු n සංඛ්‍යාව මත එකිනෙකට වෙනස් මිනිසුන් n සංඛ්‍යාවක් අසුන් ගැන්විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $(n-1)!$ බව පෙන්වන්න.
- දැන් එකිනෙකට ආසන්නව පවතින සර්වසම වට මේස යුගලක් සලකන්න. එක් වට මේසයක් වටා පුටු l සංඛ්‍යාවක් ද අනෙක වටා පුටු $(n-1)$ සංඛ්‍යාවක් ද පිළියෙල කර ඇත්තේ වෙන් වෙන්ව තැබූ කළ එක් එක් වට මේස සහ පුටු කට්ටල ඉහත ආරම්භයේ කී ගුණාංගය සපුරාලන පරිදිය. ($n \neq 2l$)
- මෙම වට මේස ද්විත්වය වටා එකිනෙකට වෙනස් මිනිසුන් k සංඛ්‍යාවක් අසුන් ගැන්විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන කොපමණ ද? ($1 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{Z}^+$)
 - මෙම වට මේස ද්විත්වය වටා එකිනෙකට වෙනස් මිනිසුන් n සංඛ්‍යාවක් අසුන් ගැන්විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $n!$ බව පෙන්වන්න.

b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{2r+1}{r(r+2)(r+4)}$ හා $V_r = \frac{Ar+B}{r(r+2)}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+2}$ වන පරිදි A හා B අගයන් සොයන්න.

එනමින් $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{67}{96} - \frac{4n+5}{4(n+1)(n+3)} - \frac{4n+9}{4(n+2)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^n U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඵ්කය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}$ සඳහා $W_r = U_r + U_{r+1}$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^n W_r = 2 \sum_{r=1}^n U_r + U_{n+1} - U_1$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=2}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඵ්කය සොයන්න.

$$(13) \quad a) \quad (A)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 6 & 15 & -3 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{ලෙස දී ඇත.}$$

3×3 ඒකක න්‍යාසය I නම්,

$B \times A = 39I$ බව පෙන්වන්න.

එනැයිත් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ

$$-x + 2y - z = 4$$

$$3x - y - 3z = 4$$

$$4x + y + z = 5 \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

ඉහත සමගාමී සමීකරණ පද්ධතිය විසඳා x, y, z ගණනය කරන්න.

b) ඕනෑම $z, w \in \mathbb{C}$ සඳහා

$$1) \quad w \bar{w} = |w|^2$$

$$2) \quad w + \bar{w} = 2\operatorname{Re}(w)$$

$$3) \quad w - \bar{w} = 2i \operatorname{Im}(w) \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

එනැයිත්

$$|z + w|^2 - |z - \bar{w}|^2 = 4\operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(w) \quad \text{හා}$$

$$|z + w|^2 - |z + \bar{w}|^2 = 4\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w) \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

$$c) \quad z = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$w = \cos \beta + i \sin \beta$$

$\psi = \cos \gamma + i \sin \gamma$ ලෙස වන z, w, ψ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා 3ක් සඳහා

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \gamma + \sin \beta = 0 \quad \text{වේ නම්}$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{\psi} = 0 \quad \text{බව පෙන්වා}$$

මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = 0 \quad \text{බව පෙන්වන්න.}$$

(14) a) $f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$ වේ. $f'(x) = \frac{8(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ හා

$f''(x) = \frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ බව පෙන්වමින් තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ හැරවුම් ලක්ෂ්‍ය හා තනිවර්තක ලක්ෂ්‍ය සඳහන් කරමින් $f(x)$ ප්‍රස්ථාරය අඳින්න.

b) P නම් ලක්ෂ්‍යය ආලෝක ප්‍රභවයක් H වූ උසක සිට නියත V ආන්ත ප්‍රවේගයකින් සිරස්ව පහළට වැටේ. මෙය පොළොව මත පතිත වන ලක්ෂ්‍යය O වේ. O සිට මනින ලද විස්ථාපනය y ද මිනිසාගේ සෙවනැල්ලේ දිග x නම්, සෙවනැල්ලේ දිග වෙනස්වන සීඝ්‍රතාවය y හි ශ්‍රිතයක් ලෙස වූ $\dot{x} = \frac{Vhd}{(y-h)^2}$ මගින් දෙන බව පෙන්වන්න. මිනිසාගේ උස h වේ.

(15) i) $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්

$\int_0^1 x(1-x)^4 dx$ අගයන්න.

ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනයෙන් $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ සොයන්න.

iii) $y = x$ රේඛාව හා $y = x(2-x)$ වක්‍රයෙන් පර්යන්ත වර්ගඵලය සොයන්න.

(17) a) $\tan(x+\theta) \cdot \cot(x-\theta) = t$ හා $t=0$ වේ නම්, $\sin \theta \leq \frac{t-1}{t+1}$ බව පෙන්වන්න.

b) $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි එක් මූලයක් $\frac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

එනමින්, $4\cos^2\theta + \tan^2\theta = 10$ සමීකරණය, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ පරාසය තුළ විසඳන්න.

c) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $\sin$ ප්‍රමේයය හා $\cos$ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{ABC} = 30^\circ$ ද D යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයද වේ. E යනු $AE : ED = m : 2$ වන පරිදි මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. මෙහි $m > 0$ වේ. $\hat{ECD} = \theta$ ද $\hat{CED} = \alpha$ ද වේ.

i) $AD = \frac{1}{2}\sqrt{(a-\sqrt{3}c)^2 + c^2}$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\frac{9a^2}{\sin^2\alpha} \sin^2\theta = (a - \sqrt{3}c)^2 + c^2$ වන පරිදි m සොයන්න.

d) $\sin^{-1}(1-x) + \sin^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$ සමීකරණය විසඳන්න.